DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES

1ère épreuve commune aux 3 options M, P et TA

Durée : 4 heures

Dans cette épreuve, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

I

On notera E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continues et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}^{+*}, \exists A \in \mathbb{R}^{+*} : \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad t \geqslant A \Rightarrow |f(t)| \leqslant e^{\gamma . t} .$$

-1°) Montrer que si f est un élément de E alors pour tout réel strictement positif x l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} f(t).e^{-xt}\, dt \quad \text{converge.}$$

On notera, pour une telle fonction f, $\widetilde{f}$ l'application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$.

- 2°) Montrer que les applications f suivantes, déterminées par leur expression, sont des éléments de E et déterminer $\widetilde{f}$ dans chaque cas.

a) $f_0(t) = 1$; b) $f_1(t) = t$;

c) $f_2(t) = t^2$; d) $f_n(t) = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

- 3°) Montrer que E est un espace vectoriel réel et que l'application $\widetilde{\ }$ de E dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, qui a f associe $\widetilde{f}$, est une application linéaire.

II

Soit φ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\varphi(0) = 1$ et $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour t différent de 0.

- 1°) Etudier cette fonction et donner l'allure du graphe représentatif.

- 2°) Montrer que φ est un élément de E .

- 3°) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} + R_n(t) ,$$

avec : $|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{2n+1}}{(2n+2)!}$

- 4°) Montrer que φ est développable en série entière et donner son développement.

- 5°) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{2k+1}} + S_n(x).$$

Déterminer a_k et une majoration de $|S_n(x)|$

- 6°) En déduire :

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad \widetilde{\varphi}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } x.$$

Peut-on conclure pour x appartenant à $]0,1]$?

III

- 1°) Soit ψ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\psi(t) = \sin t$. Montrer que ψ est un élément de E et déterminer $\widetilde{\psi}$.

2°) a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad |e^t - 1 - t| \leqslant \frac{t^2}{2} . e^{|t|}$.

.../...

b) Montrer que si f est un élément de E alors il en est de même de l'application : $t \longmapsto t.f(t)$, que $\widetilde{f}$ est dérivable et que :

$$(\widetilde{f})'(x) = -\int_0^{+\infty} t.f(t).e^{-xt}dt$$

-3°) Montrer que si f est un élément de E alors :

$$\widetilde{f}(x) \longrightarrow 0.$$
$$x \longrightarrow +\infty$$

-4°) Soit f un élément de E tel que $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe.

Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$g(t) = \frac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$, $g(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$,

est un élément de E et que : $\widetilde{g}(x) = \int_x^{+\infty} \widetilde{f}(t)dt$.

(On pourra utiliser 2°) et 3°)).

- 5°) En déduire $\widetilde{\varphi}$.

- 6°) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}.e^{-t}dt$.

IV

- 1°) On notera E^1 l'ensemble des éléments f de E qui sont dérivables et tels que f' soit aussi un élement de E.

a) Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \sin(e^t)$ est un élément de E continûment dérivable qui n'appartient pas à E^1.

b) Montrer que si f appartient à E^1 alors :

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad (\widetilde{f'})(x) = x.\widetilde{f}(x) - f(0)$.

- 2°) On notera E^2 l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et de dérivée seconde f'' appartenant à E.

Montrer que si f appartient à E^2 alors f et f' appartiennent à E et donner une expression de $(\widetilde{f''})$ analogue à celle du 1°)b).

- 3°) On considère l'équation différentielle :

$$x.y'' + 2y' + x.y = 0 \qquad (1)$$

Montrer qu'il existe une solution f de (1) appartenant à E^2 telle que : $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et la déterminer.

(On pourra d'abord commencer par chercher la forme d'une telle solution grâce à I.3°), III.2b), IV.1b) et 2), III.3°), III.5°) puis vérifier.)

- 4°) Résoudre (1) sur $\mathbb{R}^{+*}$

On pourra poser : $y = z.f$, avec f solution déterminée au 3°), et se ramener à une équation différentielle linéaire du 1er ordre en z', la dérivée de z.

- 5°) Résoudre l'équation différentielle :

$$x.y'' + 2y' + x.y = x^2 \qquad (2)$$